Über die Summierbarkeit durch typische Mittel.

Von MARCEL RIESZ in Stockholm.

1. Im Jahre 1909 habe ich einen Konvergenzsatz für DIRICHLETsche Reihen ausgesprochen, dessen Beweis ich später in den Acta Mathematica[1]) veröffentlicht habe. Dieser und ein verwandter Satz haben vielfache zahlentheoretische Anwendungen gefunden.[2]) Ich habe auch die Verallgemeinerung dieser Sätze auf *typische Mittel* angedeutet. Da nun auch diese Verallgemeinerungen in zahlentheoretischen Fragen wiederholt angewandt worden sind, (namentlich im Teilerproblem)[3]) scheint es mir angebracht, diese Verallgemeinerungen mit ihren ausführlichen Beweisen zu veröffentlichen, um damit endlich auch den von verschiedenen Fachgenossen an mich gerichteten Aufforderungen gerecht zu werden.

Es hat sich zweckmässig erwiesen, den Satz gleich für STIELTJESsche Integrale $\int_0^\infty e^{-tz}\, dA(t)$ zu fassen, wo also $A(t)$ eine beliebige Funktion bedeutet, die z. B. in jedem endlichen Intervalle von beschränkter Schwankung ist. Dieser Ausdruck umfasst dann sowohl die DIRICHLETschen Reihen, wie auch die Integrale $\int_0^\infty a(t)\, e^{-tz}\, dt$. Ich beschränke mich in dieser Arbeit auf typische

---

1) Ein Konvergenzsatz für DIRICHLETsche Reihen, Acta Math. 40 (1916) p. 349—361.

2) Für die Anwendungen vgl. man den Encyklopädie-Artikel von H BOHR und H. CRAMÉR, Neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie. Die ältere Literatur ist auch in meiner hier angeführten Arbeit zusammengestellt.

3) H. CRAMÉR, Über das Teilerproblem von PILTZ, Arkiv f. Math. 16 (1922) No. 21, p. 1—40. Diese Arbeit enthält einen Beweis für ganzzahlige Ordnungszahlen. A. WALFISZ, Über die summatorischen Funktionen einiger DIRICHLETschen Reihen, Diss. Göttingen 1922, p. 1–56. Der Verfasser gibt in dieser Arbeit einen den speziellen Zwecken angepassten Beweis.

Mittel erster Art, deute aber die entsprechenden Ergebnisse für typische Mittel zweiter Art an.

2. Wir nennen ein Integral $\int\limits_0^\infty e^{-tz}\,d\,A(t)$ durch typische Mittel k-ter Ordnung summierbar,[4]) wenn der Grenzwert

$$(1)\quad \lim_{\omega\to\infty} \omega^{-k} A_k(z, \omega) = \lim_{\omega\to\infty} \omega^{-k} \int\limits_0^\omega e^{-tz}(\omega-t)^k\,d\,A(t), \quad (k \geq 0)$$

existiert. Die Definition der gleichmässigen Summierbarkeit leuchtet ohne weiteres ein. Wir setzen im folgenden speziell

$$(2)\qquad A_k(0, \omega) = \int\limits_0^\omega (\omega-t)^k\,d\,A(t) = A_k(\omega)$$

Wir sprechen nun einige Sätze aus, deren Beweise später folgen.

Satz I. *Ist*

$$(3)\qquad A_k(\omega) = o(e^{\omega c}\omega^k)\ , \ (c > 0,\ k \geq 0),$$

so ist das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-tz}\,d\,A(t)$ *in jedem endlichen Gebiet der Halbebene* $\Re(z) > c$ *durch Mittel k-ter Ordnung gleichmässig summierbar und definiert somit in dieser Halbebene eine regulär-analytische Funktion* $G(z)$. *Ist diese Funktion noch in gewissen Punkten der Geraden* $\Re(z) = c$ *regulär,*[5]) *dann ist das Integral auch in diesen Punkten durch Mittel k-ter Ordnung summierbar und zwar gleichmässig auf jeder Regularitätsstrecke der Geraden. Die Bedingung* (3) *ist auch eine notwendige, damit die Gerade wenigstens einen Punkt enthalte, in dem die Reihe durch Mittel k-ter Ordnung summierbar ist.*[6])

[4]) Vgl. G. H. Hardy and M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series. Cambridge Tracts, No. 18 (1915). Im folgenden als *Tract* zitiert.

[5]) Wir schreiben, wie üblich, $\Re(a+ib) = a$ und $\Im(a+ib) = b$

[6]) Die Bedingung (3) ist bei $c \leq 0$ nicht mehr notwendig aber noch hinreichend. Somit besteht der erste Teil des Satzes auch in diesem Falle. Da indessen dieser Fall auf denjenigen des Textes leicht zurückgeführt werden kann, und der Beweis sich bei $c > 0$ bequemer gestaltet, begnügen wir uns hier mit diesem letztgenannten Fall. Die Bezeichnung o wenden wir im bekannten Landau'schen Sinne an, d. h. $f(\omega) = o(\varphi(\omega))$ bedeutet, dass $\dfrac{f(\omega)}{\varphi(\omega)}$ mit ins unendliche wachsendem ω nach Null strebt. Dagegen bedeutet $f(\omega) = O(\varphi(\omega))$ wie gewöhnlich, dass derselbe Quotient endlich bleibt. Wird

Satz II. *Ist* $k=0$, *d. h.*

$$A_0(\omega)=A(\omega)=o(e^{\omega c}) \tag{3'}$$

und die Funktion $G(z)$ *rechts von einer Strecke der Geraden* $\Re(z)=c$ *beschränkt, dann konvergiert das Integral* $\int_0^\infty e^{-zt}\,d\,A(t)$ *in jedem Punkte, in dem die auf dieser Strecke fast überall existierende Randfunktion entweder eine Lipschitzsche Bedingung oder irgendeine der üblichen Konvergenzbedingungen einer Fourierschen Reihe erfüllt und zwar konvergiert das Integral gleichmässig auf jeder inneren Teilstrecke einer jeden Strecke, wo diese Bedingungen gleichmässig erfüllt sind.*[7])

Satz III. *Es sei* $k>0$ *und* (3) *erfüllt. Ist die Funktion* $G(z)$ *rechts von einer Strecke der Geraden* $\Re(z)=c$ *beschränkt, dann ist das Integral auf dieser Strecke fast überall durch Mittel* k*-ter Ordnung summierbar. Dies ist namentlich in jedem Stetigkeitspunkte der Randfunktion der Fall. Die Summierbarkeit ist eine gleichmässige in jedem Intervall, das in einem Stetigkeitsintervall ganz enthalten ist.*

Zuletzt mögen hier einige Andeutungen über typische Mittel zweiter Art Platz finden mit besonderer Rücksicht auf den Umstand, dass diese Mittel bei dem besonders wichtigen Fall der gewöhnlichen Dirichletschen Reihen mit den arithmetischen Mitteln gleichwertig sind.

Wir schreiben jetzt unsere Integrale in der Form

$$\int_1^\infty v^{-z}\,d\,C(v).$$

Die typischen Mittel zweiter Art sind dann durch den Ausdruck

$$\omega^{-k}C_k(z,\omega)=\omega^{-k}\int_1^\omega v^{-z}(\omega-v)^k\,d\,C(v)$$

gegeben. Die der Bedingung (3) entsprechende Voraussetzung lautet hier

$$C_k(0,\omega)=C_k(\omega)=o\,(\omega^{k+c}).$$

---

in der Bedingung (3) o durch O ersetzt, dann sind die Mittel k-ter Ordnung auf jeder Regularitätsstrecke der Geraden $\Re(z)=c$ gleichmässig beschränkt. Eine ähnliche Bemerkung gilt auch für die Notwendigkeit der Bedingung und für alle anderen Sätze.

[7]) Zur näheren Erläuterung dieses und des folgenden Satzes vgl. den Abschnitt 6.

Für reguläre Punkte gilt ein ähnlicher Satz wie I. Auch das Analogon von II gilt. In III müssen aber über die Randfunktion ähnliche spezielle Voraussetzungen wie in II getroffen werden. (Vgl. hierzu *Tract* p. 55, Bemerkungen über die Sätze 42 u. 43).

3. Wir leiten jetzt einige Hilfssätze ab, aus denen unsere Sätze leicht folgen.

Hilfssatz I. *Es sei $b(t)$ eine (etwa im Lebesgueschen Sinne) integrierbare Funktion, die der Bedingung*

$$b(t) = o(t^k) \tag{4}$$

genügt. Hierbei bedeutet k eine beliebige reelle Zahl. Dann konvergiert das Integral

$$F(z) = \int_0^\infty b(t)\, e^{-tz}\, dt \tag{5}$$

in der Halbebene $\Re(z) > 0$ absolut und stellt daselbst eine regulär-analytische Funktion $F(z)$ dar. Ist diese Funktion $F(z)$ auch noch in gewissen Punkten x der imaginären Achse regulär, so ist für diese Werte x und eine beliebige nicht negative ganze Zahl i

$$H(x, \omega) = e^{-\omega x} \frac{d^j}{dx^j}\left(F(x)\, e^{\omega x}\right) - \int_0^\omega b(t)\, e^{-tx}(\omega - t)^j dt = o(\omega^k). \tag{6}$$

Diese Limesgleichung gilt gleichmässig auf jeder Regularitätsstrecke der imaginären Achse.[8])

Der Beweis ist demjenigen ganz analog, den ich für einen ähnlichen Satz über Potenzreihen in einer früheren Arbeit[9]) gegeben habe.

Es sei die Funktion $F(z)$ auf der Strecke $(i\tau_1, i\tau_2)$, wo $\tau_1 < \tau_2$, mit Einschluss der Endpunkte regulär. Wir wählen dann die Zahl $a' < 0$ so nahe an 0, dass die Funktion noch im Rechteck $(i\tau_1,\ i\tau_2,\ a' + i\tau_2,\ a' + i\tau_1)$ dieselbe Eigenschaft besitze. Wir setzen

---

[8]) Wie es aus dem folgenden Beweise hervorgeht, gilt sogar in jedem Halbstreifen, $\Re(z) \geq a$, $\tau_1 \leq \Im(z) < \tau_2$ in dem die Funktion regulär ist, gleichmässig

$$e^{\omega z} H(z, \omega) = o(\omega^k).$$

Herr Szegö gab neulich eine schöne Anwendung für einen Spezialfall eines von mir herrührenden analogen Satzes über Potenzreihen ($k = j = 0$, o durch O ersetzt). Vgl. G Szegö, Tschebyscheffsche Polynome und nicht fortsetzbare Potenzreihen, Math. Ann. 87 (1922) p. 90—111, spez. p. 95 u. ff.

[9]) Sätze über Potenzreihen, Arkiv f. Mat. etc. Bd. 11, No. 12 (1916) p. 1—16, spez. p. 10 ff.

endlich $z_1' = a' + i\tau_1$, $z_2' = a' + i\tau_2$, $z_1'' = a'' + i\tau_1$, $z_2'' = a'' + i\tau_2$ wo a'' eine beliebige, aber feste positive Zahl bedeutet.

In den folgenden Überlegungen nehmen wir zunächst $k \geq 0$ an. Der Fall $k < 0$, den wir übrigens im folgenden nicht benötigen, wird sich nachträglich leicht erledigen.

Wir betrachten die Funktion

(7) $$g_\omega(z) = \omega^{-k} e^{\omega z} (z - i\tau_1)^{j+k+1} (z - i\tau_2)^{j+k+1} H(z, \omega)$$

und zeigen, dass bei hinreichend grossem ω auf der ganzen Begrenzung des Rechtecks $(z_1', z_1'', z_2'', z_2')$

(8) $$|g_\omega(z)| < \varepsilon$$

wird, wie klein auch die positive Zahl ε sein mag.

Wie leicht ersichtlich, ist für $\Re(z) > c$

$$H(z, \omega) = \int_\omega^\infty b(t)\, e^{-tz} (t - \omega)^j\, dt.$$

Mithin nach (4) für genügend grosses ω, wenn noch der Kürze halber $\Re(z) = \sigma$ gesetzt wird.

$$|H(z, \omega)| < \eta \int_\omega^\infty t^k e^{-t\sigma} (t - \omega)^j\, dt,$$

wo η eine beliebig kleine Zahl bedeutet. Oder

(9) $$|H(z, \omega)| < \eta e^{-\omega\sigma} \int_0^\infty (\omega + u)^k e^{-u\sigma} u^j\, du <$$

$$< \eta e^{-\omega\sigma} 2^k \int_0^\infty (\omega^k + u^k) e^{-u\sigma} u^j\, du < \frac{\eta K \omega^k e^{-\omega\sigma}}{\sigma^{j+k+1}}.$$[10])

Hieraus folgt unmittelbar (vgl. die Ungleichung (11)), dass $|g_\omega(z)|$ auf den Strecken $(i\tau_1, z_1'')$, $(z_1''\, z_2'')$, $(z_2'', i\tau_2)$ beliebig klein gemacht werden kann.

Wir müssen nun noch $|g_\omega(z)|$ auf den linken Begrenzungsstücken des Rechtecks abschätzen. Zunächst ist es einleuchtend, dass es eine feste Zahl K_1 gibt derart, dass in jedem Punkte des Rechtecks $(i\tau_1, i\tau_2, z_2', z_1')$

(10) $$\left| e^{-\omega z} \frac{d^j}{dz^j} (F(z) e^{\omega z}) \right| < K_1 \omega^j.$$

Bestimmen wir andererseits ω_0 so, dass für $t \geq \omega_0$ die Ungleichung $|b(t)| < \delta t^k$ gilt, wo δ eine beliebig klein wählbare positive Zahl

[10]) Wir bezeichnen mit $K, K_1, K_2, \ldots$ Zahlen, bei denen es nur darauf ankommt, dass sie endlich sind.

ist. Dann ergibt sich

$$\left|\int_0^{\omega} b(t)\, e^{-tz}(\omega-t)^j dt\right| < \omega^j \int_0^{\omega_0} |\, b(t)\,|\, e^{-t\sigma} dt + \delta \int_{\omega_0}^{\omega} t^k e^{-t\sigma}(\omega-t)^j dt = I_1 + I_2.$$

Nun ist im ganzen Rechteck

$$I_1 < K_2\, \omega^j,$$

wo K_2 nur von ω_0 abhängt. Ausserdem ist

$$I_2 < \delta\, e^{-\omega\sigma} \int_{\omega_0}^{\omega} t^k e^{-(\omega-t)\sigma}(\omega-t)^j\, dt < \delta\, \omega^k e^{-\omega\sigma} \int_{\omega_0}^{\omega} e^{-(\omega-t)\sigma}(\omega-t)^j\, dt <$$

$$< \frac{\delta\, \omega^k\, e^{-\omega\sigma}\, \Gamma(j+1)}{|\,\sigma\,|^{j+1}}$$

Mithin

$$\left|\int_0^{\omega} b(t)\, e^{-tz}(\omega-t)^j\, dt\right| < K_2\, \omega^j + \frac{\delta\, \omega^k\, e^{-\omega\sigma}\, \Gamma(j+1)}{|\,\sigma\,|^{j+1}}.$$

Ferner ist auf der Begrenzung des Rechtecks

(11) $$|\, z - i\tau_1\,|^{j+k+1}\, |\, z - i\tau_2\,|^{j+k+1} < K_3\, |\,\sigma\,|^{j+k+1}.$$

Aus diesen Abschätzungen erhalten wir

$$|\, g_{\omega}(z)\,| < |\,\sigma\,|^{j+k+1}\left(K_4\, \omega^{j-k}\, e^{\omega\sigma} + \frac{K_5\, \delta}{|\,\sigma\,|^{j+1}}\right).$$

Da aber bekanntlich für $\nu \geq 0,\ l \geq 0$

$$e^{-\nu}\, \nu^l \leq \left(\frac{l}{e}\right)^l,$$

so ist der letzte Ausdruck kleiner als

$$K_6\, \omega^{-(2k+1)} + K_6\, \delta\, |\,\sigma\,|^k.$$

Für genügend grosses ω wird dieser Ausdruck kleiner als ein beliebig kleines ε. Damit ist (8) für die ganze Begrenzung des Rechtecks $(z_1', z_1'', z_2'', z_2')$ dargelegt.

Nun ist aber die Funktion $g_{\omega}(z)$ in diesem Rechteck regulär, daher erreicht ihr absoluter Betrag sein Maximum auf der Begrenzung. Mithin ist für einen beliebigen Punkt x der Strecke $(i\tau_1, i\tau_2)$

(12) $$\left| e^{\omega x} \frac{d^j}{d x^j}\, (e^{\omega x} F(x)) - \int_0^{\omega} b(t)\, e^{-tx}(\omega-t)^j\, dt \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon\, \omega^k}{|\, i\tau_1 - x\,|^{j+k+1}\, |\, i\tau_2 - x\,|^{j+k+1}}$$

d. h. die Beziehung (6) bewiesen. Besteht nun die Strecke (x_1, x_2) ausschliesslich aus Regularitätsstellen, so ist sie in einer grösseren Strecke von derselben Eigenschaft enthalten. Bezeichnet man die Endpunkte dieser grösseren Strecke mit $i\tau_1$ und $i\tau_2$, so folgt aus (12), dass die Limesgleichung (6) für die Punkte der Strecke (x_1, x_2) gleichmässig besteht.

Im obigen war $k \geq 0$ angenommen. Ist $k < 0$, dann ersetzen wir in (7) den Faktor $(z-i\tau_1)^{j+k+1}(z-i\tau_2)^{j+k+1}$ mit $(z-i\tau_1)^{j-2k+1}$ $(z-i\tau_2)^{j-2k+1}$ Statt der Abschätzung (9) erhält man jetzt

$$|H(z, \omega)| < \eta\, \omega^k e^{-\omega\sigma} \int_0^\infty e^{-u\sigma} u^j\, du = \frac{\eta\, \omega^k e^{-\omega\sigma} \Gamma(j+1)}{\sigma^{j+1}}.$$

Daher bleibt die Abschätzung $|g_\omega(z)| < \varepsilon$ für die rechte Hälfte der Begrenzung bestehen.

Für I_2 erhält man jetzt $(\omega_0 > 1)$

$$I_2 < \delta\, e^{-\omega\sigma} \int_{\omega_0}^{\omega} t^k e^{(\omega-t)\sigma} (\omega-t)^j\, dt = \delta\, e^{-\omega\sigma}\left(\int_{\omega_0}^{\frac{\omega}{2}} + \int_{\frac{\omega}{2}}^{\omega}\right) <$$

$$< \delta\, e^{-\omega\sigma}\left(\omega^{j+1} e^{\frac{\omega\sigma}{2}} + \left(\frac{\omega}{2}\right)^k \frac{\Gamma(j+1)}{|\sigma|^{j+1}}\right).$$

Aus dieser Ungleichung und den übrigen auch jetzt bestehenden Ungleichungen ergibt sich die Abschätzung $|g_\omega(z)| < \varepsilon$ auch für die linke Hälfte der Begrenzung. Das übrige folgt wie oben.

4. Im folgenden nehmen wir wieder $k \geq 0$ an.

Aus dem Hilfssatze I folgt unmittelbar der

H i l f s s a t z II. *Es sei $b(t)$ eine integrierbare Funktion, die der Bedingung* (4) *genügt, wobei $k \geq 0$. Ist die durch das Integral* (5) *in der Halbebene $\Re(z) > 0$ dargestellte Funktion $F(z)$ noch in gewissen Punkten x der imaginären Achse regulär, dann ist das Integral* (5) *in diesen Punkten durch Mittel k-ter Ordnung summierbar, d. h. es ist*

$$F(x) = \lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} \int_0^\omega (\omega-t)^k\, b(t)\, e^{-tx}\, dt. \tag{13}$$

Die Summierbarkeit ist auf jeder Regularitätsstrecke eine gleichmässige.

Der Beweis lässt sich ebenso führen wie der entsprechende Beweis für Potenzreihen in meiner auf S. 5 angeführten Arbeit.

Ist zunächst k ganz, dann ist der Beweis in der Formel (6) enthalten Man setze in der Tat in dieser Formel $j = k$ und schreibe

$$e^{-\omega x} \frac{d^k}{dx^k} (f(x) e^{\omega x}) = \omega^k f(x) + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} \omega^{k-p} f^{(p)}(x).$$

Bei nicht ganzzahligen k setzen wir

$$B_k(x, \omega) = \int_0^{\omega} b(t) e^{-tx} (\omega - t)^k \, dt.$$

Dann ist nach bekannten Sätzen über Integration nicht ganzzahliger Ordnung

$$\frac{\Gamma([k]+1)\,\Gamma(k-[k])}{\Gamma(k+1)} B_k(x, \omega) = \int_0^{\omega} B_{[k]}(x, t)\,(\omega - t)^{k-[k]-1} \, dt =$$

$$= \int_0^{\omega} (B_{[k]}(x, t) - t^{[k]} f(x))\,(\omega - t)^{k-[k]-1} dt + \frac{\Gamma([k]+1)\,\Gamma(k-[k])}{\Gamma(k+1)} f(x).$$

Das letzte Integral kann geschrieben werden

$$\int_0^{\omega} = \int_0^{\omega-1} + \int_{\omega-1}^{\omega}.$$

Schreibt man in (6) $j = [k]$, erhält man sofort

$$\int_{\omega-1}^{\omega} = o\,(\omega^k).$$

Andererseits kommt durch partielle Integration

$$\int_0^{\omega-1} = \frac{B_{[k]+1}(x, \omega-1) - f(x)\,(\omega-1)^{[k]+1}}{[k]+1} +$$

$$+ \frac{k-[k]-1}{[k]+1} \int_0^{\omega-1} (B_{[k]+1}(x, t) - f(x)\, t^{[k]+1})\,(\omega - t)^{k-[k]-2} \, dt.$$

Beachtet man jetzt, dass $k-[k]-2 < -1$ und daher

$$\int_0^{\omega-1} (\omega-t)^{k-[k]-2}\, dt < \int_1^{\infty} t^{k-[k]-2}\, dt = \frac{1}{1+[k]-k}$$

und setzt in (6) $j=[k]+1$; so folgt ohne Schwierigkeit, dass auch $I_1 = o(\omega^k)$ ist. Damit ist aber (13) dargelegt. Da alle Abschätzungen gleichmässig gelten, gilt auch (13) auf jeder Regularitätsstrecke gleichmässig.

Ähnlich beweist man den

Hilfssatz III. *Wenn* $k > k' > -1$, *dann gilt unter der Bedingung* (4) *auf jeder Regularitätsstrecke der imaginären Achse gleichmässig*

$$\int_0^{\omega} b(t)\, e^{-tx} (\omega-t)^{k'}\, dt = o(\omega^k)$$

und

$$\int_0^{\omega} b(t)\, (e^{-tx} - e^{-\omega x})\, (\omega-t)^{k'-1}\, dt = o(\omega^k).$$ [11])

5. Diese Ergebnisse setzen uns in Stand unsere Hauptsätze zu beweisen. Übrigens ist Hilfssatz II ein Spezialfall von Satz I.

Es sei also die Bedingung (3) erfüllt.

a) Zunächst sei k eine ganze Zahl. Dann kommt (vgl. *Tract* p. 40) nach $k+1$ partiellen Integrationen

$$\omega^{-k} A_k(z,\omega) = \omega^{-k} \int_0^{\omega} e^{-tz} (\omega-t)^k\, dA(t) = \omega^{-k} e^{-\omega z} A_k(\omega) +$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}\omega^{-k}}{k!} \int_0^{\omega} A_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1} \left\{ e^{-zt} (\omega-t)^k \right\} dt.$$

Hieraus beweist man wie im *Tract* (l. c.), dass infolge der Bedingung (3) $\omega^{-k} A_k(z,\omega)$ mit ins unendliche wachsendem ω für $\Re(z) > c$ gegen eine regulär-analytische Funktion $G(z) = \frac{z^{k+1}}{k!} \int_0^{\infty} A_k(t)\, e^{-zt} dt$ konvergiert. Es habe nun diese Funktion auf der Geraden $\Re(z) = c$

---

[11]) Vgl. hierzu *Tract* p. 43. Das erste Ergebnis besagt nur für nicht ganze k' etwas neues.

eine Regularitätsstrecke. Es ist leicht zu zeigen, dass auch noch auf dieser Strecke $\lim\limits_{\omega \to \infty} \omega^{-k} A_k(z, \omega) = G(z)$ gleichmässig gilt.

Zunächst ist nach (3) auf der Geraden $\Re(z) = c$ gleichmässig

$$e^{-\omega z} \omega^{-k} A_k(\omega) = o(1).$$

Damit ist der erste Teil des letzten Ausdruckes abgeschätzt. Der zweite Teil kann, wenn man noch $A_k(t) e^{-tc} = b(t)$ setzt, geschrieben werden

$$\frac{\omega^{-k}}{k!} z^{k+1} \int_0^\omega A_k(t) e^{-tz} (\omega - t)^k dt + \frac{\omega^{-k}}{k!} \sum_{p\,o}^{k} H_p z^{p+1} \int_0^\omega A_k(t) e^{-tz} (\omega - t)^p dt =$$

$$= \frac{\omega^{-k}}{k!} z^{k+1} \int_0^\omega b(t) e^{-t(z-c)} (\omega - t)^k dt + \frac{\omega^{-k}}{k!} \sum_{p\,o}^{k} H_p z^{p+1} \int_0^\omega b(t) e^{-t(z-c)} (\omega - t)^p dt,$$

wo die H_p Konstanten sind. Wir schreiben nun für $\Re(z) > c$

$$\frac{k!\, G(z)}{z^{k+1}} = \int_0^\infty A_k(t) e^{-tz} dt = \int_0^\infty b(t) e^{-t(z-c)} dt.$$

Laut Voraussetzung besitzt diese Funktion auf der Geraden $\Re(z) = c$ eine Regularitätsstrecke (z_1, z_2). Daher ist die auf der imaginären Achse gelegene Strecke $(z_1 - c,\ z_2 - c)$ eine Regularitätsstrecke der Funktion $\int_0^\infty b(t) e^{-tz} dt$. Wendet man nun die Hilfssätze II und III an, dann folgt unmittelbar, dass das erste Glied auf der rechten Seite des Ausdruckes (14) auf der Strecke (z_1, z_2) gleichmässig gegen die Funktion $G(z)$ konvergiert und dass die übrigen Glieder, d. h. $\omega^{-k} \sum\limits_{p\,o}^{k}$ gleichmässig gegen Null konvergieren.

b) Es sei jetzt k keine ganze Zahl. Es genügt den Beweis nur unter der Voraussetzung $0 < k < 1$ explizit auszuführen. Im allgemeinen Falle spielt $A_{|k|+1}(t)$ dieselbe Rolle wie jetzt $A_1(t)$.

Man ersieht, wie im *Tract* (p. 42—43), dass unter der Voraussetzung (3) $\omega^{-k} A_k(z, \omega)$ für $\Re(z) > c$ mit ins unendliche wachsendem ω gegen die regulär-analytische Funktion

$$(15) \qquad G(z) = \frac{z^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty A_k(t) e^{-tz} dt = z^2 \int_0^\infty A_1(t) e^{-tz} dt$$

konvergiert. Es ergibt sich jetzt (vgl. l. c.)

$$\omega^{-k} A_k(z, \omega) = \omega^{-k} \int_0^{\omega} e^{-tz}(\omega-t)^k \, d\, A(t) =$$

$$= \omega^{-k} \int_0^{\omega} A_1(t) \frac{d^2}{dt^2} \left\{ (e^{-tz} - e^{-\omega z}) \, (\omega-t)^k \right\} dt + A_k(\omega)\, e^{-\omega z}\, \omega^{-k} = I_1 + I_2.$$

Infolge von (3) ist wieder für $\Re(z) = c$ gleichmässig

$$\lim_{\omega \to \infty} I_1 = \lim_{\omega \to \infty} A_k(\omega)\, e^{-\omega z}\, \omega^{-k} = 0.$$

Andererseits ist, indem wir $A_1(t)\, e^{-tc} = b(t)$ setzen,

$$I_1 = \omega^{-k} z^2 \int_0^{\omega} A_1(t) e^{-tz} (\omega-t)^k + 2\, k\, \omega^{-k} z \int_0^{\omega} A_1(t) e^{-tz} (\omega-t)^{k-1} \, dt +$$

$$+ k(k-1)\, \omega^{-k} \int_0^{\omega} A_1(t) (e^{-tz} - e^{-\omega z}) \, (\omega-t)^{k-2} \, dt = J_1 + J_2 + J_3.$$

Aus (3) und aus (vgl. *Tract* p. 27)

$$A_1(\omega) = \frac{1}{\Gamma(k+1)\, \Gamma(1-k)} \int_0^{\omega} A_k(t) \; (\omega-t)^{-k} \, dt$$

folgt leicht, dass auch

$$A_1(\omega) = o\,(e^{\omega c}\, \omega^k)$$

ist. Dann folgt aber aus Hilfssatz II wie oben, dass auf jeder Regularitätsstrecke gleichmässig

$$\lim_{\omega \to \infty} J_1 = G(z)$$

und aus Hilfssatz III, dass ebenfalls gleichmässig

$$\lim_{\omega \to \infty} J_2 = 0 \text{ und } \lim_{\omega \to \infty} J_3 = 0$$

ausfällt. Damit ist nun unser Beweis zu Ende.

Dass die Bedingung (3) auch notwendig ist, damit das Integral an wenigstens einer Stelle der Geraden $\Re(z) = c$ durch Mittel k-ter Ordnung summierbar sei, folgt leicht durch Überlegungen, die im *Tract* durchgeführt sind (p. 40—43) und auf die wir schon oben hingewiesen haben.

6. Wir schreiten jetzt zur Verallgemeinerung des Satzes I, d. h. zum Beweise der Sätze II und III.

Es sei also wieder die Bedingung (3) erfüllt und die durch (15) für $\Re(z) > c$ dargestellte Funktion $G(z)$ sei für

$$\Re(z) > c\ ,\quad \tau_1 - \delta \leq \Im(z) \leq \tau_2 + \delta$$

bechränkt. Dann gibt es bekanntlich auf der Strecke $(c + i(\tau_1 - \delta), c + i(\tau_2 - \delta))$ fast überall eine Randfunktion, der sich $G(z)$ nähert, wenn z von rechts und der reellen Achse parallel den Punkten dieser Strecke zustrebt. Wir bezeichnen auch diese Randfunktion mit $G(z)$

Bedeutet jetzt z einen beliebigen Punkt der Halbebene $\Re(z) > c$ und bezeichnet man mit C einen beliebigen in dieser Halbebene verlaufenden rektifizierbaren Kurvenzug, der die Punkte $z_1 = c + i\tau_1$ und $z_2 = c + i\tau_2$ mit einander verbindet und so beschaffen ist, dass die durch die Strecke (z_1, z_2) und C gebildete geschlossene Kurve den Punkt z einschliesst, so ist nach bekannten Sätzen

$$(16)\quad G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_2}^{z_1} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = G_1(z) + G_2(z)$$

wobei also

$$(17)\qquad G_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_2}^{z_1} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

und

$$(18)\qquad G_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Bedeutet nun ζ einen Punkt der Strecke (z_1, z_2), so ist offenbar

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\int_0^\infty e^{t(\zeta - z)}\, dt$$

daher

$$G_1(z) = \int_0^\infty e^{-tz} dt \int_{z_2}^{z} \left(-\frac{1}{2\pi i} G(\zeta) e^{t\zeta}\right) d\zeta = \int_0^\infty p(t)\, e^{-tz}\, dt$$

Nach einem bekannten Satze von RIEMANN-LEBESGUE ist dann

(19) $$p(t) = o(e^{tc}).$$

Ferner folgt aus (17), dass $G_1(z)$ in der ganzen, durch die Strecke (z_1, z_2) aufgeschnittenen Ebene regulär ist und im unendlichen wenigstens von der ersten Ordnung verschwindet. Wir setzen noch

$$P(t) = \int_0^t p(v)\,dv$$

Dann ist wiederum für $\Re(z) > c$ die Funktion $G_2(z)$ gleich dem durch Mittel k-ter Ordnung summierten Ausdruck $\int_0^\infty e^{-tz}(dA(t) - dP(t))$ d. h.

$$G_2(z) = \lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} \int_0^\omega e^{-tz}(\omega - t)^k\,(dA(t) - dP(t))$$

Setzen wir jetzt $A(t) - P(t) = B(t)$, dann folgt aus (3) und (19)

$$B_k(\omega) = \int_0^\omega (\omega - t)^k\,dB(t) = o(\omega^k e^{\omega c})$$

Andererseits ergibt sich aus (18) (und der Willkürlichkeit von C), dass die Funktion $G_2(z)$ in der z. B. durch die Strecken $(z_2, c + i\infty)$ und $(c - i\infty, z_1)$ aufgeschnittenen Ebene regulär ist. Für das Integral $\int_0^\infty e^{-tz}\,dB(t)$ sind also alle Bedingungen des Satzes I erfüllt und somit ist dieses Integral auf jeder in (z_1, z_2) enthaltenen Strecke durch Mittel k-ter Ordnung gleichmässig summierbar.

Aus dem über $G_1(z)$ gesagten (namentlich aus dem Verhalten dieser Funktion im unendlichen) folgt dass für einen beliebigen Punkt x der Strecke (z_1, z_2) der Ausdruck

$$\int_0^\omega p(t)\,e^{-tx}(\omega - t)^k\,dt \qquad (k \geq 0 \text{ oder auch nur } > -1)$$

durch ein absolut konvergentes Integral dargestellt werden kann, das ähnlich gebaut ist wie das PERRONsche Integral (vgl. *Tract* p. 12) oder dessen Verallgemeinerungen (vgl. *Tract* p. 50). Dieses Integral lässt sich dann durch Methoden behandeln, die aus der Theorie der Potenzreihen oder FOURIERschen Reihen geläufig sind (vgl. z. B. meine Arbeit: Über einen Satz des Herrn Fatou, J. f. Math. Bd. 140 (1911) p. 91—99, spez. p. 98—99).

Da die Sätze II und III in der hier gegebenen Allgemeinheit für die genannten zahlentheoretischen Anwendungen wenigstens einstweilen reichlich ausreichen dürften, gehen wir hier auf weitere Verallgemeinerungen nicht ein.[12])

---

[12]) Vgl. indessen die Andeutungen, die ich in einer kurzen Mitteilung (Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, Comptes Rendus 149 (1909) p. 909) gegeben habe und die zum Teil von Herrn Neder (Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Ann. 84 (1921) p. 117—136) ausgeführt worden sind. Z. B. kann die Beschränktheit der Funktion durch viel allgemeinere Bedingungen ersetzt werden. Es lässt sich auch ein dem sogenannten Riemannschen Lokalisationssatz (vgl. für diesen Ausdruck Neder l. c.) nachgebildeter Satz verhältnismässig leicht herleiten.